Uma breve introdução à Análise Dimensional

Nelson Luís Dias
Departamento de Engenharia Ambiental e
Lemma — Laboratório de Estudos em Monitoramento e
Modelagem Ambiental
Universidade Federal do Paraná

13 de fevereiro de 2014

Sumário

Lista de Figuras

Prefácio

Este texto é parte de um projeto maior, em preparação, que ambiciona cobrir o conteúdo de duas disciplinas que o autor leciona na graduação da UFPR. Não seria justo fazer meus alunos esperarem demais pelas partes que já estão razoavelmente prontas. O leitor, ou a leitora, deve entretanto cuidar para o fato de que se trata de um excerto de um projeto maior, e que consequentemente pode haver falhas. Note, leitor ou leitora, que se trata de uma introdução, e que não há nenhuma ambição de completude da parte do autor; mesmo assim... Divirta-se!

1

Uma breve introdução à análise dimensional

Em cursos de engenharia, matemática e física (entre outros), é frequente encontrar afirmações do tipo: "a dimensão de trabalho é $\mathsf{ML^2T^{-2}}$", mas a definição do que sejam "dimensões" é raramente, ou nunca, encontrada. O nome que se dá ao estudo das dimensões físicas das variáveis de um problema, e dos parâmetros que o governam, é *análise dimensional*. A análise dimensional tem um impacto profundo em todos os problemas de engenharia. Este capítulo apresenta uma breve introdução informal ao assunto. As idéias aqui apresentadas são uma adaptação da introdução à análise dimensional de (Barenblatt, 1996).

1.1 – Primeiros exemplos

Exemplo 1.1 O período de um pêndulo mostrado na figura 1.1 é T. O comprimento da corda é L. A massa do pêndulo é m. A aceleração da gravidade é g.

As dimensões fundamentais *deste problema* são M (massa), L (comprimento), e T (tempo), porque todas as variáveis do problema possuem dimensões que podem ser expressas como produtos de potências dessas três. Conforme veremos a seguir, esse fato na verdade é um *teorema*, mas por ora é razoável aceitá-lo, como o fazem a maioria dos livros de física ou de engenharia. A única variável da lista acima que envolve M é m. O fato de que m é a única variável com dimensão M nos faz desconfiar de que m não pode fazer parte da "lista" de variáveis que intervêm no cálculo de T. Por quê? Porque, conforme também veremos, todas as equações da Física devem envolver apenas grupos de variáveis *adimensionais*. Por enquanto, acredite, e continue.

Com T, L e g, temos:

$$
\begin{aligned}
[\![T]\!] &= \mathsf{T},\\
[\![L]\!] &= \mathsf{L},\\
[\![g]\!] &= \mathsf{LT^{-2}}.
\end{aligned}
$$

Na lista acima, o símbolo $[\![\cdot]\!]$ significa "dimensão de". Confirme a afirmação feita acima: todas as 3 variáveis têm dimensões expressas como produtos de potências de L e T.

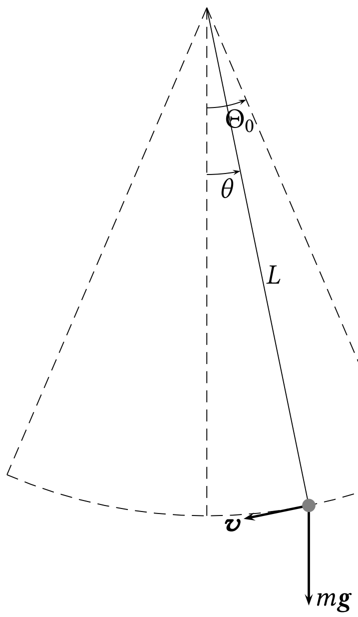

Figura 1.1: Análise dimensional do período de um pêndulo.

Com a última "equação dimensional" acima, podemos construir uma variável adimensional facilmente:

$$
\begin{aligned}
g &= c^2 L T^{-2} \\
T^2 &= c^2 \frac{L}{g} \\
T &= c\sqrt{\frac{L}{g}}
\end{aligned}
$$

A variável adimensional acima é c. Se nós a chamarmos de Π_1,

$$
\Pi_1 = \frac{T}{\sqrt{\frac{L}{g}}}.
$$

Uma solução analítica (aproximada) do problema do pêndulo pode ser obtida, e nos leva ao valor numérico

$$
\Pi_1 = 2\pi,
$$

onde $\pi = 3{,}141592\ldots$. A análise dimensional não permite a obtenção do valor numérico de Π_1. Ele poderia ser obtido, entretanto, *experimentalmente*, realizando-se diversas medidas de L e T; cada uma delas produziria, por exemplo, um valor experimental para Π_1. A média desses valores seria uma boa estimativa do valor de π_1.

Exemplo 1.2 Suponha um escoamento de um fluido com massa específica ρ e viscosidade cinemática ν em torno de um cilindro com diâmetro D, com velocidade U. Suponha que a força do escoamento sobre o cilindro seja F. O que a análise dimensional pode nos dizer?

As dimensões fundamentais são, novamente, M, L, T. Mas nem sempre isso será assim! As dimensões das diversas variáveis são

$$
\begin{aligned}
[\![\rho]\!] &= \mathsf{ML}^{-3},\\
[\![\nu]\!] &= \mathsf{L}^2\mathsf{T}^{-1},\\
[\![D]\!] &= \mathsf{L},\\
[\![U]\!] &= \mathsf{LT}^{-1},\\
[\![F]\!] &= \mathsf{MLT}^{-2}.
\end{aligned}
$$

Temos 5 variáveis, e 3 dimensões fundamentais. Devemos ter $5 - 3 = 2$ grupos adimensionais (na verdade, *esse* é o teorema dos Π's!). Vamos escolher 3 variáveis que estarão (potencialmente) presentes nos 2 grupos. Por simplicidade, escolhemos D, U e ρ. Note que, entre elas, temos presentes todas as dimensões fundamentais. Faça

$$
\begin{aligned}
\Pi_1 &= FD^aU^b\rho^c,\\
[\![\Pi_1]\!] &= \left[\mathsf{MLT}^{-2}\right][\mathsf{L}]^a\left[\mathsf{LT}^{-1}\right]^b\left[\mathsf{ML}^{-3}\right]^c,\\
1 &= \mathsf{M}^{1+c}\mathsf{L}^{1+a+b-3c}\mathsf{T}^{-2-b}.
\end{aligned}
$$

Nas equações acima, note que nós impusemos, sem perda de generalidade, que o expoente de F é 1: de fato, qualquer potência de Π_1 será novamente adimensional, e portanto essa escolha não tira a generalidade do cálculo de Π_1. Note também que nós estabelecemos que uma variável adimensional tem dimensão 1: $[\![\Pi_1]\!] = 1$. Temos um sistema de equações em a, b, c:

$$
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -3\\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a\\ b\\ c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1\\ -1\\ 2\end{bmatrix}.
$$

A solução do sistema é $a = -2$, $b = -2$, $c = -1$, donde

$$
\Pi_1 = \frac{F}{\rho U^2 D^2}.
$$

Procuramos, da mesma forma, o segundo parâmetro adimensional:

$$
\begin{aligned}
\Pi_2 &= \nu D^aU^b\rho^c,\\
[\![\Pi_2]\!] &= \left[\mathsf{L}^2\mathsf{T}^{-1}\right][\mathsf{L}]^a\left[\mathsf{LT}^{-1}\right]^b\left[\mathsf{ML}^{-3}\right]^c,\\
1 &= \mathsf{M}^{c}\mathsf{L}^{2+a+b-3c}\mathsf{T}^{-1-b},
\end{aligned}
$$

donde $a = -1$, $b = -1$, $c = 0$, e

$$
\Pi_2 = \frac{\nu}{UD}.
$$

Nós acabamos de encontrar $\Pi_2 = 1/\mathrm{Re}$, onde Re é o número de Reynolds em mecânica dos fluidos. Na verdade, tanto faz Π_2 ou $1/\Pi_2$ (porque qualquer potência de um número adimensional é, novamente, um número adimensional), e nossa relação em uma roupagem "clássica" é

$$
\frac{F}{\rho U^2 D^2} = f\left(\frac{UD}{\nu}\right).
$$

A função f é desconhecida, e a Análise Dimensional não nos permitirá obtê-la, da mesma maneira que não foi possível encontrar o valor numérico de Π_1 no exemplo anterior. Ela precisa ser encontrada experimentalmente. Mas em vez de irmos para o laboratório e variarmos aleatoriamente 5 variáveis (digamos, com 10 valores de cada, produzindo $10^5 = 100000$ de experimentos), nós agora podemos fazer um número bem menor de experimentos, e variar aleatoriamente apenas 2 parâmetros, Π_1 e Π_2 (se cada um deles assumir 10 valores, teremos $10^2 = 100$ experimentos: a economia no esforço experimental é substancial).

1.2 – Definição formal de Dimensão

Um *sistema de unidades* é formado por um conjunto de padrões para as suas grandezas fundamentais, em termos das quais todas as demais grandezas do sistema podem ser escritas. Dado o conjunto de grandezas fundamentais, isso define a *classe* do sistema. Por exemplo, o sistema internacional de unidades (SI) é um sistema de classe MLT (se circunscrito a grandezas mecânicas). As grandezas fundamentais do sistema são massa, comprimento e tempo. Os padrões (unidades) são, respectivamente, o quilograma (kg), o metro (m), e o segundo (s), donde o nome, também utilizado, MKS. Dois exemplos de grandezas *derivadas* no SI são a velocidade (com unidades $\mathrm{m\,s^{-1}}$), e a força (com unidades $\mathrm{kg\,m\,s^{-2}}$). Outros sistemas de mesma classe são possíveis. Dois exemplos são o sistema CGS (centímetro – grama – segundo), que é métrico, e o sistema MLT britânico (pé – libra-massa – segundo).

O conjunto de grandezas fundamentais é razoavelmente arbitrário: é necessário apenas que todas as demais grandezas sejam exprimíveis em função das grandezas fundamentais escolhidas; cada escolha de grandezas fundamentais definirá uma nova classe. Por exemplo, em mecânica o sistema técnico métrico kilograma-força – metro – segundo tem como grandezas fundamentais a força, o comprimento e o tempo, sendo um sistema de classe FLT. Da mesma maneira, o sistema britânico libra-força – pé – segundo também é um sistema de classe FLT.

Até agora, nós fomos cuidadosos em não utilizar a palavra *dimensão.* Com a introdução acima, nós estamos em condições de dar uma definição formal de dimensão. Considere portanto dois sistemas de unidades de mesma classe. Por exemplo, considere dois sistemas MLT, tais como o CGS e o MKS.

Definição — O fator numérico pelo qual uma grandeza muda quando passa de um sistema de unidades para outro de mesma classe é a sua dimensão.

Por exemplo, considere uma passagem CGS $\rightarrow$ MKS. Os fatores numéricos para massa, comprimento e tempo são: $\mathsf{M} = 0{,}001$; $\mathsf{L} = 0{,}01$; e $\mathsf{T} = 1$.

Definição — As dimensões das unidades fundamentais que definem a *classe* do sistema são as dimensões fundamentais dessa classe.

No caso acima, as unidades fundamentais são massa, comprimento e tempo. As dimensões fundamentais da classe são M, L, e T.

Considere o seguinte princípio: todos os sistemas de uma determinada classe são equivalentes. Por exemplo, para a classe de sistemas MLT, as dimensões de *todas* as grandezas físicas devem ser expressas apenas em função dessas dimensões fundamentais: se a é uma grandeza qualquer do sistema de unidades, devemos ter

$$[\![a]\!] = \phi(\mathsf{M}, \mathsf{L}, \mathsf{T})$$

onde $[\![\cdot]\!]$ significa "dimensão de", e ϕ é a *função dimensional* da grandeza a. A consequência do princípio de equivalência dos sistemas de unidade de uma determinada classe é o

Teorema 1.1 A função dimensional ϕ é *sempre* uma função potência nas dimensões fundamentais:

$$\phi = \mathsf{M}^{\alpha}\mathsf{L}^{\beta}\mathsf{T}^{\gamma}$$

Fica claro que nós estamos sempre nos referindo a *relações* entre sistemas: não há um sistema *absoluto* de unidades. A ênfase será sempre nas *transformações* sofridas por um dado objeto matemático quando ele é escrito, ou referenciado, em diferentes *sistemas*. Essa é a mesma idéia que vai motivar nossas operações com vetores e tensores em espaços vetoriais.

Ainda falta uma coisa: uma *grandeza* física é um termo genérico: força, carga elétrica, pressão, velocidade, são *grandezas*. Nos problemas do mundo real, entretanto, existem variáveis: "a força do escoamento sobre um cilindro", "a carga elétrica armazenada em uma bateria", "a velocidade média do rio em uma seção transversal", "a pressão do escoamento em um ponto do espaço e um instante do tempo", etc., são *variáveis* que entram em problemas específicos. Portanto, necessitamos de:

Definição — Variáveis são instâncias específicas de grandezas físicas. A dimensão de uma variável é a mesma dimensão da sua grandeza física.

Em particular, variáveis podem ser *adimensionais*:

Definição — Variáveis cujos valores numéricos não mudam quando passam de um sistema de unidades para outro de mesma classe são denominadas variáveis *adimensionais*.

Exemplo 1.3 O grupo

$$\Pi_1 = \frac{T}{\sqrt{L/g}}$$

é uma variável adimensional. Se

$$[\![g]\!] = \mathsf{L}\mathsf{T}^{-2},$$

na passagem de um sistema MLT com valores T', L', g' para outro com valores $T = T'\mathsf{T}$, $L = L'\mathsf{L}$, $g = g'\mathsf{L}\mathsf{T}^2$ teremos

$$\begin{aligned}\Pi_1 &= \frac{T}{\sqrt{L/g}}\\ &= \frac{T'\mathsf{T}}{\sqrt{L'\mathsf{L}/(g'\mathsf{L}\mathsf{T}^{-2})}}\\ &= \frac{T'\mathsf{T}}{\mathsf{T}\sqrt{L'/(g')}}\\ &= \frac{T'}{\sqrt{L'/g}} = \Pi_1'.\end{aligned}$$

Portanto, $\Pi_1 = \Pi_1'$, e Π_1 é uma grandeza adimensional ■

1.3 – Análise dimensional e formas universais de funções de fenômenos físicos

A solução de um problema físico consiste em obter uma variável física a (note que a agora denota uma *variável* específica, e não mais uma grandeza) em função de diversas outras, digamos, $a_1, \ldots, a_k; b_1, \ldots, b_m$. Em geral nós procuramos a função f tal que (Eq. (1.19) de Barenblatt (1996)):

$$a = f(a_1, \ldots, a_k; b_1, \ldots, b_m).$$

As k variáveis ou $a_1, \ldots, a_k$ possuem entre si as k dimensões fundamentais da classe de sistemas de unidades na qual o fenômeno em questão é descrito. As variáveis restantes possuem dimensões *dependentes*, de tal forma que

$$\begin{aligned} [\![b_1]\!] &= [\![a_1]\!]^{p_1} \ldots [\![a_k]\!]^{r_1}, \\ &\vdots \\ [\![b_m]\!] &= [\![a_1]\!]^{p_m} \ldots [\![a_k]\!]^{r_m}. \end{aligned}$$

Teorema 1.2 Teorema dos Π's:

$$f(a_1, \ldots, a_k; b_1, \ldots, b_m) = a_1^p \ldots a_k^r \Phi \left(\frac{b_1}{a_1^{p_1} \ldots a_k^{r_1}}, \ldots, \frac{b_m}{a_1^{p_m} \ldots a_k^{r_m}} \right).$$

Em suma:

> O Teorema dos Π's simplesmente afirma que as leis da Física não dependem do particular sistema de unidades utilizado.

Suponha agora que você queira analisar algum tipo de força F em um escoamento de um fluido com densidade (massa específica) ρ, viscosidade cinemática ν, velocidade U, comprimento D. Suponha também que o escoamento se dê, parcialmente ou não, sob a ação da gravidade, de maneira que você precisa também incluir a aceleração da gravidade g na sua lista. Em uma classe de sistemas MLT, a matriz dimensional será

	D	U	ρ	F	ν	g
M	0	0	1	1	0	0
L	1	1	−3	1	2	1
T	0	−1	0	−2	−1	−2

Note que, essencialmente, nós simplesmente adicionamos g à lista de variáveis que já existia no Exemplo 2. Portanto, nós já temos os parâmetros adimensionais Π_1 e Π_2 daquele exemplo. Falta obter Π_3, apenas:

$$\begin{aligned} \Pi_3 &= g D^a U^b \rho^c \\ [\![\Pi_3]\!] &= \left[\mathsf{LT}^{-2}\right] [\mathsf{L}]^a \left[\mathsf{LT}^{-1}\right]^b \left[\mathsf{ML}^{-3}\right]^c \\ 1 &= \mathsf{M}^c \mathsf{L}^{1+a+b-3c} \mathsf{T}^{-2-b} \end{aligned}$$

Donde $a = 1$, $b = -2$, $c = 0$, e

$$\Pi_3 = \frac{gD}{U^2}$$

Em mecânica dos fluidos o parâmetro adimensional usual é $1/\sqrt{\Pi_3}$, denominado *número de Froude*:

$$\mathrm{Fr} = \frac{U}{\sqrt{gD}}.$$

O que o teorema dos Π's agora nos permite escrever é

$$\frac{F}{\rho U^2 D^2} = \phi\left(\frac{UD}{\nu}, \frac{U}{\sqrt{gD}}\right).$$

Se o problema em questão for complicado demais para ser resolvido analitica ou numericamente, uma forma muito comum de ataque é a construção de um *modelo reduzido físico.* No modelo, mede-se tudo, ou seja:

$$F_m, \rho_m, U_m, D_m, \nu_m, g.$$

Enquanto isso, no protótipo nós devemos ter uma lista análoga,

$$F_p, \rho_p, U_p, D_p, \nu_p, g.$$

Agora, se nós desejarmos utilizar o *mesmo fuido* no modelo e no protótipo (exemplo: modelos reduzidos hidráulicos, utilizando água), devemos reescrever essas listas:

$$F_m, \rho, U_m, D_m, \nu, g.$$

e

$$F_p, \rho, U_p, D_p, \nu, g.$$

Nossa condição de similaridade para a construção do modelo agora é óbvia:

$$\frac{U_m D_m}{\nu} = \frac{U_p D_p}{\nu},$$
$$\frac{U_m^2}{g D_m} = \frac{U_p^2}{g D_p}.$$

Do ponto de vista de um projetista, nós conhecemos U_p e D_p. Queremos portanto calcular quem devem ser U_m e D_m no modelo que vamos construir, de tal forma que possamos medir F_m e, dessa forma, obter F_p. Como há duas equações acima, em princípio deveria ser possível obter U_m e D_m. Tentemos:

$$U_m = U_p \frac{D_p}{D_m},$$
$$U_p^2 \frac{D_p^2}{D_m^2} \frac{1}{D_m} = \frac{U_p^2}{D_p},$$
$$D_m^3 = D_p^3,$$
$$D_m = D_p \Rightarrow U_m = U_p.$$

Portanto: o único "modelo" possível é do mesmo tamanho que o protótipo, o que é uma impossibilidade prática. Os engenheiros hidráulicos que trabalham com modelos reduzidos costumam se referir a este fato dizendo que é impossível obter "similaridade perfeita". De fato, é impossível construir um modelo *realmente* reduzido (ou seja: em uma escala menor) com o *mesmo fluido* (por exemplo água) que o protótipo, e que atenda ao mesmo tempo à igualdade dos parâmetros adimensionais "Número de Reynolds" e "Número de Froude".

Com isso, chegamos ao fim de nosso primeiro capítulo.

Referências Bibliográficas

Barenblatt, G. I. (1996). *Scaling, self-similarity and intermediate asymptotics.* Cambridge University Press.