A fórmula de de Moivre

Nelson Luís Dias, Prof. Associado UFPR
nldias@ufpr.br

21 de junho de 2013

Por que "de de Moivre"? O primeiro "de" é a preposição. O segundo faz parte do nome de Abraham *de Moivre*, da mesma forma que o meu nome completo é Nelson Luís *da Costa* Dias.

A fórmula de de Moivre é

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta)^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(n\theta), \quad n \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

1 $n \in \mathbb{N}$

(1) pode ser provada por indução. Por simplicidade, suponha inicialmente que $n \in \mathbb{N}$. Note que (1) vale para $n = 0$, desde que nós aceitemos por definição que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad z^0 = 1. \tag{2}$$

Suponha agora que (1) valha para n; então

$$\begin{aligned}(\cos\theta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta)^{n+1} &= (\cos\theta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta)^n(\cos\theta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta)\\ &= (\cos(n\theta) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(n\theta))(\cos\theta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta)\\ &= [\cos(n\theta)\cos\theta - \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}(n\theta)] + \mathrm{i}\,[\mathrm{sen}(n\theta)\cos\theta + \mathrm{sen}\,\theta\cos(n\theta)]\\ &= \cos((n+1)\beta)\mathrm{i}\,\mathrm{sen}((n+1)\beta). \end{aligned} \tag{3}$$

Portanto, se (1) vale para n, vale também para $n+1$. Como sua validade para $n = 0$ ficou estabelecida, (1) está provada (para $n \in \mathbb{N}$). Definindo-se uma notação mais compacta,

$$\cos\theta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta \equiv \mathrm{cis}\,\theta, \tag{4}$$

a fórmula de de Moivre é

$$(\mathrm{cis}\,\theta)^n = \mathrm{cis}(n\theta). \tag{5}$$

A fórmula de de Moivre permite-nos calcular as n-ésimas raízes de um número complexo. Seja $z = R\,\mathrm{cis}\,\alpha \in \mathbb{C}$, onde $R \in \mathbb{R}$. As raízes n-ésimas de z são

$$w_k = R^{1/n}\,\mathrm{cis}\,\frac{\alpha + 2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{6}$$

De fato,

$$
\begin{aligned}
w_k^n &= \left[R^{1/n}\operatorname{cis}\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right]^n \\
&= R\operatorname{cis}\left(n\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) \\
&= R\operatorname{cis}(\alpha+2k\pi) = R\operatorname{cis}\alpha = z \;\blacksquare
\end{aligned}
\tag{7}
$$

2 $n \in \mathbb{Z}$

A fórmula de de Moivre pode ser facilmente estendida para $n < 0$. Sabemos que ela vale para $n = 0$; suponha agora que ela vale para um $n < 0$ qualquer. Então,

$$
\begin{aligned}
(\cos\theta + \mathrm{i}\operatorname{sen}\theta)^{n-1} &= \frac{(\cos\theta + \mathrm{i}\operatorname{sen}\theta)^n}{\cos\theta + \mathrm{i}\operatorname{sen}\theta} \\
&= \frac{(\cos\theta + \mathrm{i}\operatorname{sen}\theta)^n(\cos\theta - \mathrm{i}\operatorname{sen}\theta)}{(\cos\theta + \mathrm{i}\operatorname{sen}\theta)(\cos\theta - \mathrm{i}\operatorname{sen}\theta)} \\
&= (\cos\theta + \mathrm{i}\operatorname{sen}\theta)^n(\cos\theta - \mathrm{i}\operatorname{sen}\theta) \\
&= (\cos(n\theta) + \mathrm{i}\operatorname{sen}(n\theta))(\cos\theta - \mathrm{i}\operatorname{sen}\theta) \\
&= [\cos(n\theta)\cos\theta + \operatorname{sen}(n\theta)\operatorname{sen}\theta] + \mathrm{i}\,[\operatorname{sen}(n\theta)\cos\theta - \operatorname{sen}\theta\cos(n\theta)] \\
&= \cos((n-1)\theta) + \mathrm{i}\operatorname{sen}((n-1)\theta).
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Portanto, se (1) vale para $n \in \mathbb{Z}$, ela também vale para $n \pm 1$, e como ela vale para $n = 0$ está provado por indução que ela vale para qualquer $n \in \mathbb{Z}$.