# O Uso da delta de Dirac no Cálculo de Probabilidades

Nelson Luís Dias, Prof. Associado UFPR
nldias@ufpr.br

9 de agosto de 2008

Dados dois eventos $A$ e $B$, a probabilidade de $B$ condicionada a $A$ é

$$P(B|A) \equiv \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \tag{1}$$

Esta definição motiva a próxima, que é a densidade de probabilidade de $y$ *condicionada* à ocorrência de $x$:

$$f_{Y|x}(y) \equiv \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}. \tag{2}$$

Embora deva ser possível deduzir rigorosamente (2) a partir de (1), não vou fazê-lo (ainda). Em vez disto, vou procurar um caso particular muito interessante. Primeiramente, note que, por definição, a densidade marginal de $y$ é dada por

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{x=-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx \\ &= \int_{x=-\infty}^{+\infty} f_{Y|x}(y) f_X(x)\,dx. \end{aligned} \tag{3}$$

Considere agora o caso em que $y = g(x)$, ou seja: em que $Y$ está deterministicamente determinado a partir da observação de $x$. A função densidade de probabilidade condicionada é então, simplesmente,

$$f_{Y|x}(y) = \delta(g(x) - y), \tag{4}$$

ou seja: dado $x$, a probabilidade de que $Y = g(x)$ é 1 (note as letras maiúscula e minúscula). Note também que (4) é uma densidade de probabilidade legítima, já que sua integral em $y$ é igual a 1. O primeiro resultado que vamos obter a partir daqui é uma fórmula para $f_Y(y)$:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{x=-\infty}^{+\infty} f_{Y|x}(y) f_X(x)\,dx \\ &= \int_{x=-\infty}^{+\infty} \delta(g(x) - y) f_X(x)\,dx. \end{aligned} \tag{5}$$

Esta é uma equação totalmente geral, que permite o cálculo da densidade de probabilidade de *qualquer* variável aleatória definida por uma função, $Y = g(X)$, independentemente de ela ser biunívoca ou não. A equação (5) pode ser prontamente generalizada para funções de várias variáveis. Em particular, se $Z = g(X,Y)$, tem-se

$$f_Z(z) = \int_{x=-\infty}^{+\infty}\int_{y=-\infty}^{+\infty} \delta(g(x,y)-z) f_{X,Y}(x,y)\,dydx. \tag{6}$$

Considere agora o seguinte exemplo: $y = x^2$, $-1 \leq X \leq +1$, com $f_X(x) = 1/2$. Esta função *não* é biunívoca. A densidade de probabilidade de $y$ é

$$f_Y(y) = \int_{-1}^{+1} \delta(x^2-y)\frac{1}{2}\,dx. \tag{7}$$

Para calcular a integral acima, é preciso um pouco de cuidado. Primeiramente, note que

$$y = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y}: \tag{8}$$

existem duas raízes, e isto precisa ser levado em consideração pelo ser humano que está resolvendo o problema: a fórmula (5) *em si* não vai dizer isto para você! O caminho mais rápido, aparentemente, é recorrer à seguinte propriedade da delta (Butkov, 1988, Cap. 6, p. 231):

$$\delta(x^2-a^2) = (1/2a)\left[\delta(x+a)+\delta(x-a)\right] \qquad (a>0); \tag{9}$$

então,

$$f_Y(y) = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{2\sqrt{y}}\left[\delta(x+\sqrt{y})+\delta(x-\sqrt{y})\right]\frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{4\sqrt{y}}[1+1] = \frac{1}{2\sqrt{y}}\;\blacksquare \tag{10}$$

Este é um exemplo simples, porém muito rico. O valor esperado de $Y$, para o qual nós vamos usar a notação $\langle Y\rangle$, agora é facilmente obtido:

$$\langle Y\rangle = \int_0^1 y f_Y(y)\,dy = \int_0^1 y\frac{1}{2\sqrt{y}}\,dy = \int_0^1 \frac{\sqrt{y}}{2}\,dy = \frac{1}{3}, \tag{11}$$

enquanto que, devido à simetria de $f_X(x)$, $\langle X\rangle = 0$.

Mais interessante ainda é a seguinte questão: se $X$ é a variável aleatória com distribuição uniforme entre $-1/2$ e $+1/2$, como acima, e $Y = X^2$, qual é a covariância entre $X$ e $Y$? Por definição, a covariância entre duas variáveis aleatórias é

$$\mathrm{Cov}\{X,Y\} = \int_{x\in\mathbb{R}}\int_{y\in\mathbb{R}} (x-\langle X\rangle)(y-\langle Y\rangle) f_{X,Y}(x,y)\,dydx. \tag{12}$$

No nosso caso particular, isto dá

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}\{X,Y\} &= \int_{x=-1}^{1}\int_{y=0}^{1} x(y-\frac{1}{3})\delta(x^2-y)f_X(x)\,dydx \\
&= \int_{x=-1}^{1}\int_{y=0}^{1} x(x^2-\frac{1}{3})\delta(x^2-y)\frac{1}{2}\,dydx \\
&= \int_{x=-1}^{1} x(x^2-\frac{1}{3})\int_{y=0}^{1} \delta(x^2-y)\frac{1}{2}\,dydx \\
&= \frac{1}{2}\int_{x=-1}^{1} x(x^2-\frac{1}{3})\underbrace{\int_{y=0}^{1}\left[\delta(x^2-y)\,dy\right]}_{=1}dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{x=-1}^{1} x(x^2-\frac{1}{3})\,dx = 0. \qquad (13)
\end{aligned}$$

Na penúltima linha acima, note a utilização simultânea de duas propriedades da delta:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-a)\,dx = 1, \qquad (14)$$

$$\delta(x) = \delta(-x). \qquad (15)$$

O resultado (13) é admirável: ele mostra que, mesmo que a dependência entre duas variáveis aleatórias seja *total*; mesmo que $Y$ seja *totalmente* dependente de $X$ na forma $Y = g(X)$, é possível que $\mathrm{Cov}\{X,Y\} = 0$. Moral da história: a covariância é uma medida de dependência *linear*, e *não* uma medida universal de dependência.

# Referências

Butkov, E. (1988). *Física matemática.* Guanabara Koogan, Rio de Janeiro.